ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Εισαγωγικά

Α*πόθεμα* εννοείται κάθε είδους αγαθό, το οποίο μπορεί να αποθηκευτεί με στόχο την τρέχουσα ή μελλοντική χρησιμοποίησή του.

Αποθέματα συναντώνται σε κάθε είδους και μορφής οργανωμένα συστήματα.

- Ρόλος και χρησιμότητα των αποθεμάτων

- Ιστορική αναδρομή

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Βασικά Στοιχεία Κόστους Αποθεμάτων

- Κόστος παραγγελίας (C_2)
- Κόστος διατήρησης (IC_1)
  - Κόστος αποθήκευσης
  - Κόστος αχρήστευσης και παλαίωσης
  - Κόστος απωλειών
  - Ευκαιριακό κόστος κεφαλαίου
- Κόστος έλλειψης (C_3)

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Καθοριστικά Συστήματα Αποθεμάτων

Τα δύο χαρακτηριστικά ερωτήματα, στα οποία καλείται να δώσει απάντηση ένα σύστημα αποθεμάτων, είναι:

- Ποια είναι η κατάλληλη ποσότητα που πρέπει να παραγγέλλεται κάθε φορά για την ανανέωση του αποθέματος (***ποσότητα παραγγελίας***)
- Πότε πρέπει να παραγγέλλεται αυτή η ποσότητα. Αυτή η χρονική στιγμή εκφράζεται συνήθως με τη στάθμη του αποθέματος, στην οποία όταν αυτό πέσει δίνεται η παραγγελία (***στάθμη παραγγελίας***)

Τα δύο βασικά δεδομένα μεγέθη που καθορίζουν τις απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα είναι:

- Η ***ζήτηση των μονάδων του αποθέματος*** κατά τη διάρκεια ορισμένης χρονικής περιόδου
- *Ο **χρόνος ικανοποίησης της παραγγελίας*** (το χρονικό δηλαδή διάστημα που μεσολαβεί από τη στιγμή που δίνεται μία παραγγελία έως ότου το απόθεμα που παραγγέλθηκε μπορεί να διατεθεί στους πελάτες)

Τα **καθοριστικά συστήματα αποθεμάτων** παραδέχονται ότι ο χρόνος ικανοποίησης της παραγγελίας και η ζήτηση των μονάδων του αποθέματος είναι σταθερές ποσότητες, αποτελούν δηλαδή ***καθοριστικά μεγέθη***.

Μεθοδολογία Ανάλυσης Συστημάτων Αποθεμάτων

- Αναφορά στις συνθήκες εφαρμογής του συστήματος
- Περιγραφή βασικών μεγεθών
- Γραφική αναπαράσταση του συστήματος
- Σύνταξη των εξισώσεων κόστους
- Κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου
- Υπολογισμός βασικών μεγεθών
- Σχόλια - συμπεράσματα
- Εφαρμογή με αριθμητικό παράδειγμα

Βασικά Μεγέθη Αποθεμάτων

Μεταβλητή	Ορισμός
Z	Ετήσια ζήτηση
z	Ζήτηση στη μονάδα του χρόνου
Q	Ποσότητα παραγγελίας
Q_0	Άριστη ποσότητα παραγγελίας (Economic Order Quantity)
A	Στάθμη παραγγελίας (Reorder point)
n	Αριθμός παραγγελιών κατά τη διάρκεια ενός έτους
C_1	Αξία της μονάδας του αποθέματος
IC_1	Ετήσιο κόστος διατήρησης της μονάδας αποθέματος
C_2	Κόστος παραγγελίας
C_3	Κόστος έλλειψης της μονάδας του αποθέματος
C_α	Ετήσιο κόστος αγορών
C_π	Ετήσιο κόστος παραγγελιών
C_δ	Ετήσιο κόστος διατήρησης του αποθέματος
C_ε	Ετήσιο κόστος έλλειψης του αποθέματος
C_τ	Συνολικό ετήσιο κόστος

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

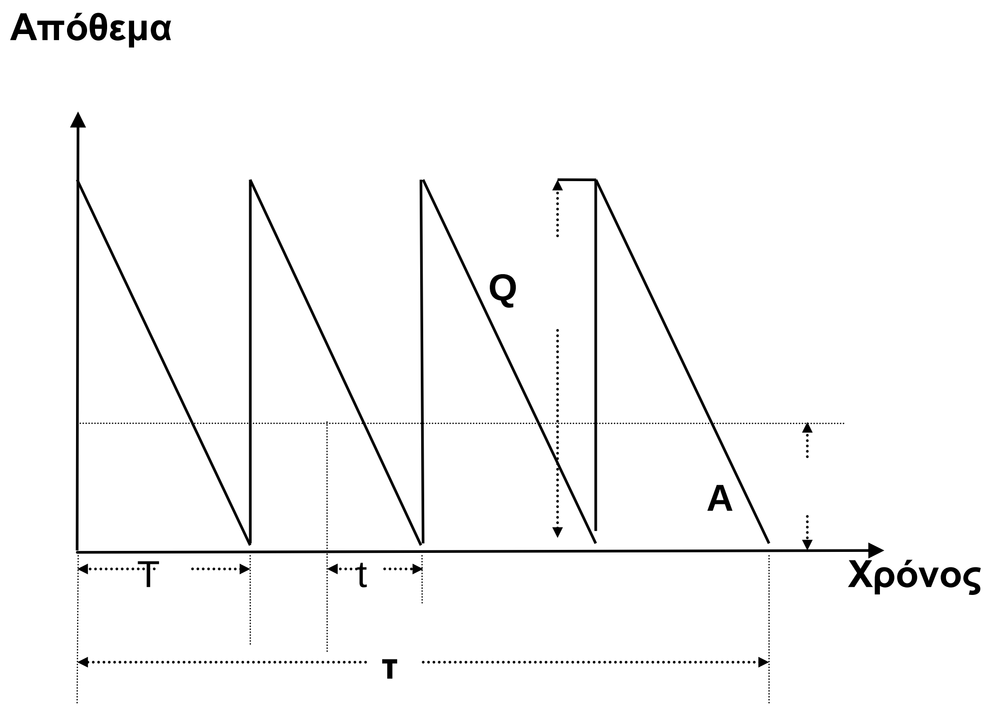
S (ή M)	Μέγιστο υπάρχον απόθεμα
R	Ρυθμός παραγωγής αποθεμάτων
k	Ρυθμός κατανάλωσης αποθεμάτων
T	Χρονικός κύκλος
t	Χρόνος ικανοποίησης της παραγγελίας
t_1	Χρονικό διάστημα ύπαρξης αποθέματος
t_2	Χρονικό διάστημα μη ύπαρξης αποθέματος
τ	Συνολικός χρονικός ορίζοντας (ή χρονικό διάστημα παραγωγής)

Ικανοποίηση της Ζήτησης Χωρίς Καθυστέρηση

Τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά λειτουργίας του συστήματος είναι:

- Όλη η ζήτηση ικανοποιείται χωρίς καθυστέρηση, επομένως το σύστημα ποτέ δε βρίσκεται χωρίς απόθεμα.
- Το σύστημα διαχειρίζεται μόνο ένα υλικό.
- Το υλικό που παραγγέλλεται μπορεί να αποθηκεύεται επ' άπειρο και σε απεριόριστες ποσότητες χωρίς να υφίσταται κόστος παλαίωσης ή αχρήστευσης.
- Παραγγέλλεται πάντοτε η ίδια ποσότητα και παραδίδεται στην αποθήκη όλη μαζί. Η στάθμη του αποθέματος αυξάνει στιγμιαία με την παραλαβή της ποσότητας.
- Το απόθεμα ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου με σταθερό ρυθμό και στο τέλος κάθε περιόδου τη στιγμή που μηδενίζεται, παραλαμβάνεται η ποσότητα Q που είχε παραγγελθεί έγκαιρα.

Διάγραμμα Λειτουργίας



όπου A: η στάθμη παραγγελίας
Q: η ποσότητα παραγγελίας
τ: ο συνολικός χρονικός ορίζοντας
t: ο χρόνος ικανοποίησης της παραγγελίας
T: ο χρονικός κύκλος (διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ανανεώσεων του αποθέματος)

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Ανάλυση Στοιχείων Κόστους - Μαθηματικό Μοντέλο

Κόστος αγοράς: $C_\alpha = Z * C_1$

Κόστος παραγγελιών: $C_\pi = n * C_2 = \frac{Z}{Q} * C_2$

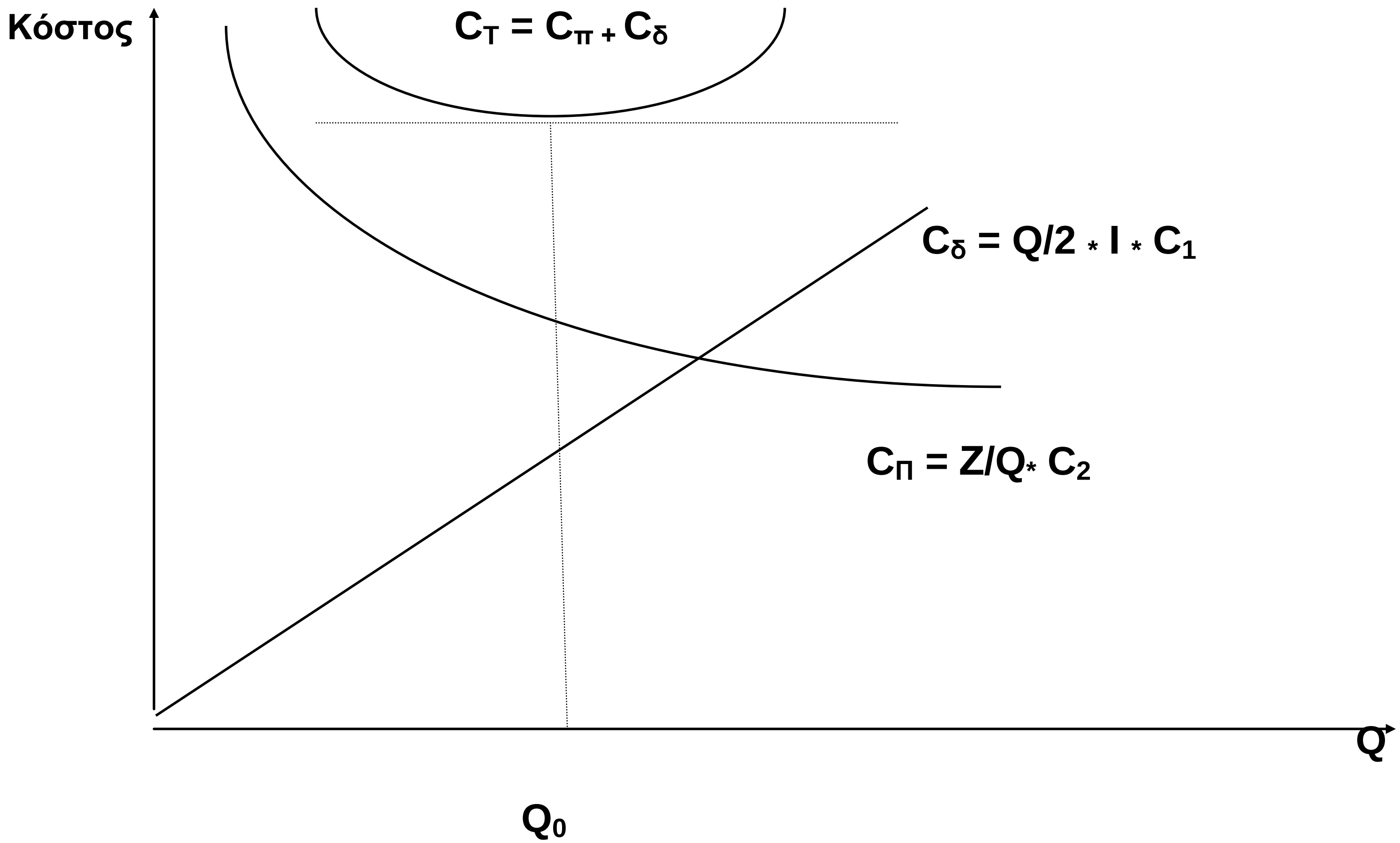
Κόστος διατήρησης: $C_\delta = \frac{Q}{2} * I * C_1$

Συνολικό κόστος: $C_\tau = Z * C_1 + \frac{Z}{Q} * C_2 + \frac{Q}{2} * I * C_1$

Η μοναδική άγνωστη μεταβλητή της συνάρτησης είναι η ποσότητα παραγγελίας *Q*, η οποία δεν επηρεάζεται καθόλου από το κόστος αγοράς

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Γραφική Παράσταση Μεταβολής Κόστους



Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Άριστη ποσότητα παραγγελίας $Q_0 = \sqrt{\dfrac{2 * Z * C_2}{I * C_1}}$

Στάθμη παραγγελίας: $A = z * t$

Αν εκκρεμεί η παραλαβή ορισμένων παραγγελιών, έστω *m*, τότε: $A = z * t - m * Q_o$

Ελάχιστο συνολικό κόστος: $K_o = \sqrt{2 * Z * C_2 * I * C_1}$

Μέσο απόθεμα: $\dfrac{Q}{2} = \sqrt{\dfrac{Z * Q * I * C_1}{2}}$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

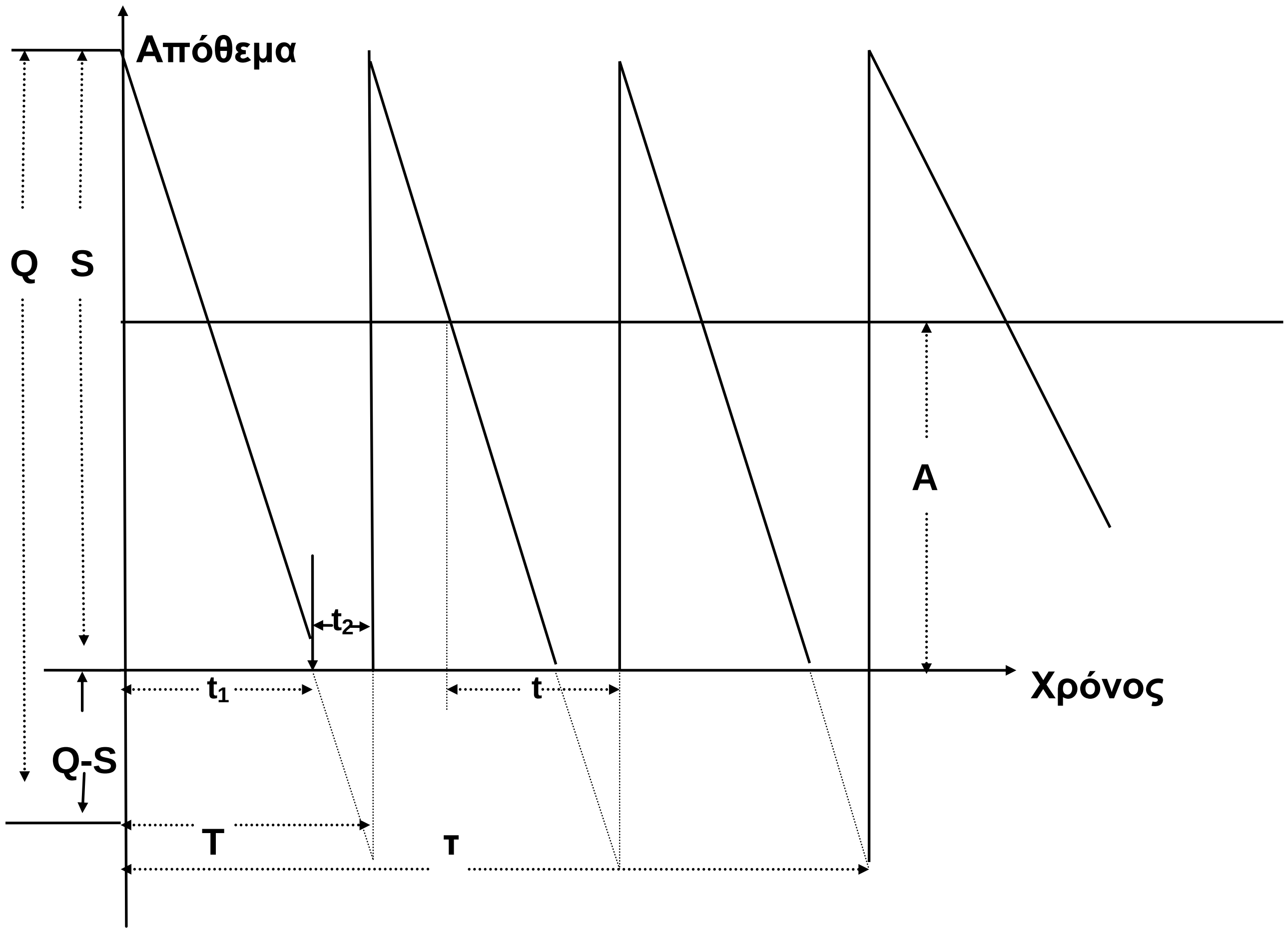
Ικανοποίηση Μέρους της Ζήτησης με Καθυστέρηση

Ικανοποιείται ολόκληρη η ζήτηση, επιτρέπεται όμως στο σύστημα να έχει μείνει χωρίς απόθεμα ενώ υπάρχει ζήτηση. Η ζήτηση που παρουσιάζεται όταν το σύστημα δεν έχει απόθεμα ικανοποιείται αμέσως μόλις παραληφθεί η νέα ποσότητα παραγγελίας.

Οι προϋποθέσεις ύπαρξης και εφαρμογής αυτού του συστήματος είναι:

- Είναι δυνατό να μην υπάρχει απόθεμα όταν ζητείται.
- Θεωρείται ότι όταν ανανεώνεται το απόθεμα, ικανοποιούνται κατά προτεραιότητα όλες οι παραγγελίες που εκκρεμούν, προτού η νέα προμήθεια χρησιμοποιηθεί για την κάλυψη των μεταγενέστερων ζητήσεων.
- Τελικά ικανοποιείται ολόκληρη η ζήτηση των μονάδων του αποθέματος, έστω με κάποια καθυστέρηση.

Διάγραμμα Λειτουργίας



όπου: S: το μέγιστο απόθεμα που υπάρχει

t_1: το χρονικό διάστημα, στο οποίο υπάρχει απόθεμα

t_2: το χρονικό διάστημα, στο οποίο δεν υπάρχει απόθεμα

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Ανάλυση Στοιχείων Κόστους

Κόστος παραγγελιών: $C_\pi = \frac{Z}{Q} * C_2$

Κόστος διατήρησης: $C_\delta = \frac{Z}{Q} * \frac{S}{2} * I * C_1 * t_1$

Κόστος έλλειψης: $C_\varepsilon = \frac{Z}{Q} * \frac{Q-S}{2} * C_3 * t_2$

Συνάρτηση συνολικού κόστους:

$$C\tau = \frac{Z}{Q} * C2 + \frac{Z}{Q} * \frac{S}{2} * I * C1 * t1 + \frac{Z}{Q} * \frac{Q-S}{2} * C3 * t2 \Rightarrow$$

$$C\tau = \frac{Z}{Q} * C2 + \frac{S}{2} * I * C1 * t1 + \frac{Q-S}{2} * C3 * t2$$

$$CT = \frac{Z}{Q} * C2 + \frac{S^2 * I * C1}{2 * Q} = \frac{(Q-S)^2 * C3}{2 * Q}$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Άριστη ποσότητα παραγγελίας: $Q_O = \sqrt{\frac{2 * Z * C_2}{I * C_1}} * \sqrt{\frac{I * C_1 + C_3}{C_3}}$

Μέγιστο απόθεμα: $S_0 = \sqrt{\frac{2 * Z * C_2}{I * C_1}} * \sqrt{\frac{C_3}{I * C_1 + C_3}}$

Μέγιστη ποσότητα που εκκρεμεί: $Q_0 - S_0 = \sqrt{\frac{2 * Z * C_2 * I * C_1}{C_3 * (IC_1 + C_3)}}$

Στάθμη παραγγελίας: $A = z * t - \sqrt{\frac{2 * Z * C_2 * I * C_1}{C_3 * (IC_1 + C_3)}}$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Μη Ικανοποίηση Μέρους της Ζήτησης

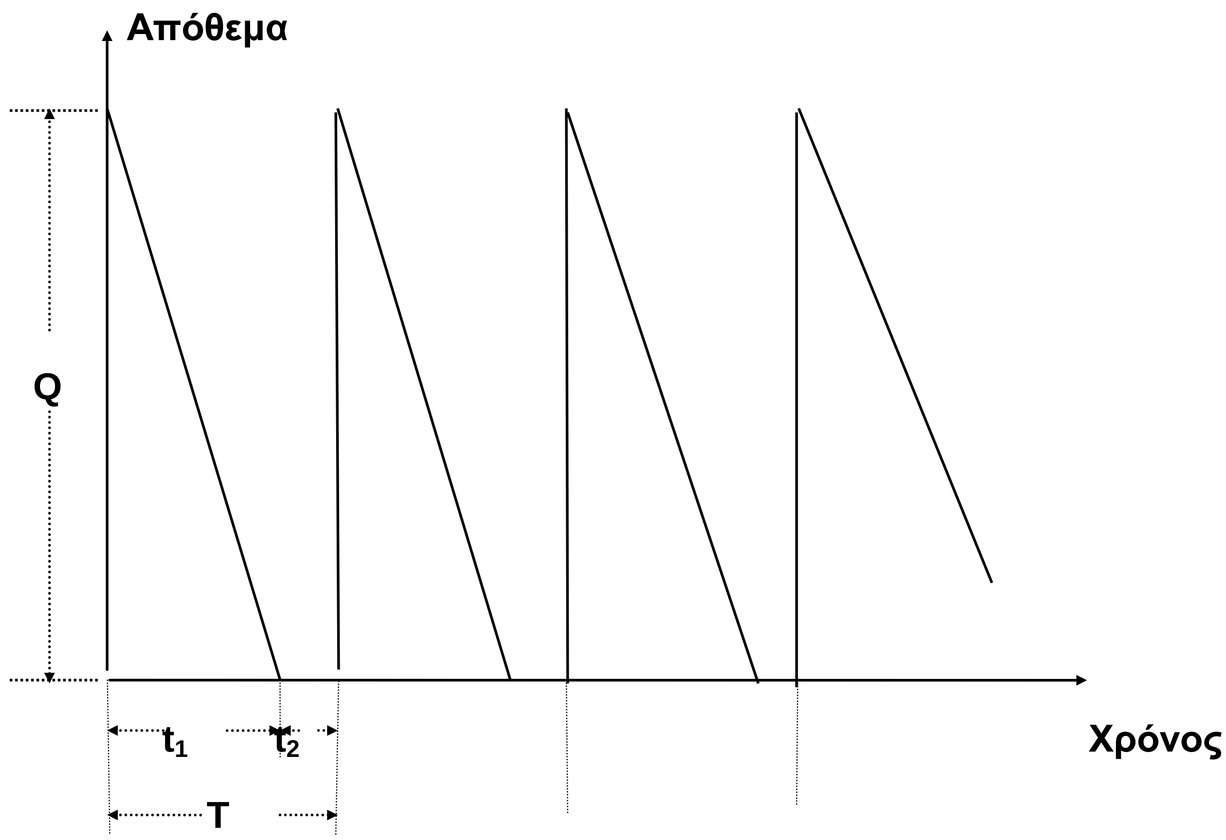
Το σύστημα αυτό είναι η *περίπτωση της χαμένης πώλησης*, κατά την οποία η ζήτηση που παρουσιάζεται κατά την περίοδο που δεν υπάρχει απόθεμα δεν ικανοποιείται, αλλά χάνεται οριστικά.

Συνεπώς ένα μέρος της ζήτησης (αυτό που αντιστοιχεί στη περίοδο t_1 του χρονικού κύκλου, κατά την οποία υπάρχει απόθεμα) ικανοποιείται άμεσα, ενώ το υπόλοιπο (αυτό που παρουσιάζεται στην περίοδο t_2, οπότε το απόθεμα έχει τελειώσει) δεν πρόκειται να ικανοποιηθεί καθόλου.

Όταν το σύστημα δε διαθέτει απόθεμα για την εξυπηρέτηση των πελατών, αυτοί δεν πρέπει να περιμένουν για την ανανέωσή του, αλλά να αναζητήσουν την ποσότητα που επιθυμούν να αγοράσουν από κάποια άλλη πηγή.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα**

Διάγραμμα Λειτουργίας



Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Από την ανάλυση των στοιχείων κόστους και την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης του συνολικού κόστους προκύπτει ότι και αν ακόμη το σύστημα αυτό των αποθεμάτων πρέπει οπωσδήποτε να τεθεί σε λειτουργία, δεν είναι ποτέ συμφέρον να υπάρχει ανικανοποίητη ζήτηση.

Δεν υπάρχει καμία θετική τιμή του χρονικού διαστήματος t_2 που να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση του συνολικού κόστους.

Επομένως δε συμφέρει ποτέ σε ένα σύστημα αποθεμάτων να μένει χωρίς απόθεμα, το οποίο δεν πρόκειται να αναπληρωθεί.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Ικανοποίηση της Ζήτησης από Παραγωγή

Τα χαρακτηριστικά λειτουργίας αυτού του συστήματος, στο οποίο ολόκληρη η ζήτηση ικανοποιείται από παραγωγή, είναι τα ακόλουθα:

- Οι ποσότητες των υλικών που απαιτούνται για την ικανοποίηση της ζήτησης δεν αγοράζονται από προμηθευτές, αλλά παράγονται από την ίδια την επιχείρηση.

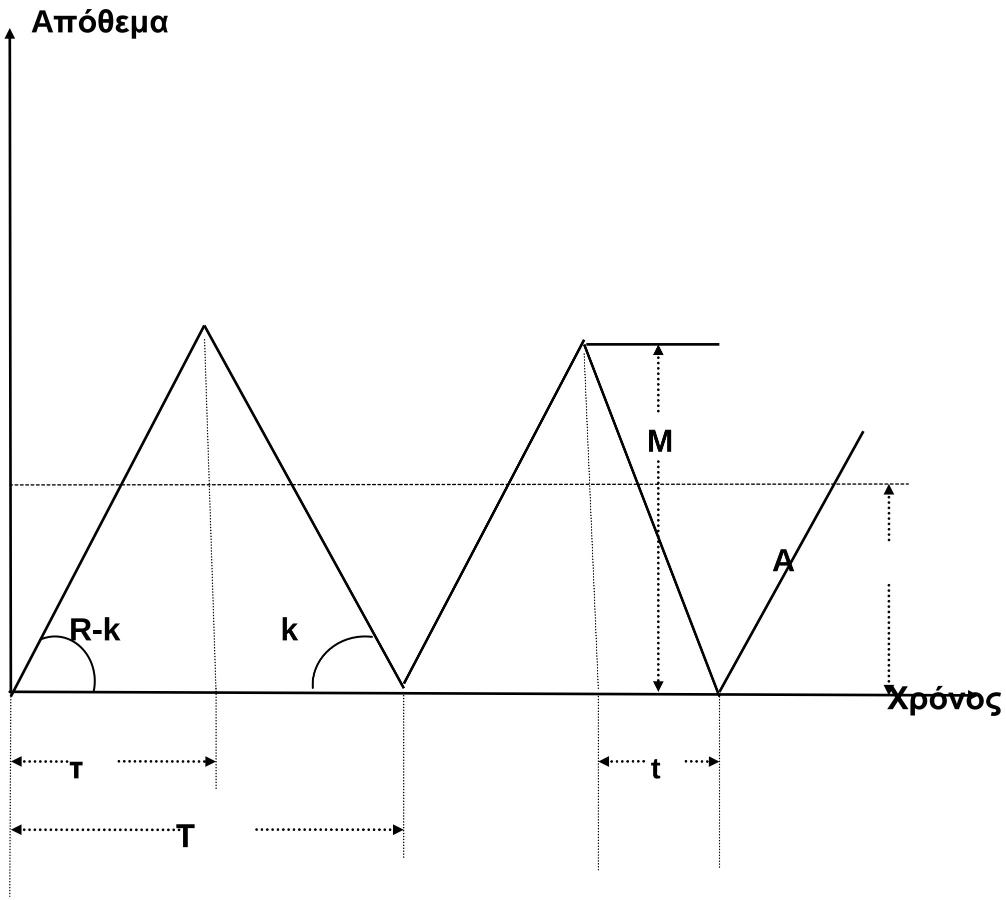
- Η ανανέωση των αποθεμάτων δεν πραγματοποιείται στιγμιαία, αλλά σύμφωνα με το ρυθμό παραγωγής.

- Ολόκληρη η ζήτηση ικανοποιείται χωρίς καθυστέρηση από τις παρτίδες των προϊόντων που έχουν ήδη παραχθεί.

- Η αξία της μονάδας (C_1) ταυτίζεται με το κόστος παραγωγής της.

- Το κόστος παραγγελίας (C_2) αντικαθίσταται από το κόστος προετοιμασίας της παραγωγής.

Διάγραμμα Λειτουργίας



Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

όπου R: ο ρυθμός παραγωγής

k: ο ρυθμός κατανάλωσης

τ: το χρονικό διάστημα παραγωγής

T: το χρονικό διάστημα κατανάλωσης

t: ο χρόνος προετοιμασίας για την παραγωγή νέας παρτίδας

A: η στάθμη του αποθέματος (που αρχίζει η προετοιμασία της παραγωγής)

M: το μέγιστο απόθεμα που διατηρεί το σύστημα

Κάθε φορά που το απόθεμα κατεβαίνει στη στάθμη *A* δίνεται εντολή για την προετοιμασία της παραγωγής της νέας παρτίδας μεγέθους *Q*. Η αναγκαία ποσότητα παράγεται κατά τη διάρκεια της περιόδου *τ* με ρυθμό παραγωγής *R* μονάδες ανά χρονική μονάδα του χρόνου και καταναλώνεται σε όλη τη διάρκεια του χρονικού κύκλου *T* με ρυθμό κατανάλωσης *k* μονάδες ανά χρονική μονάδα.

Συνεπώς η παραγωγή των διαδοχικά απαιτούμενων ποσοτήτων δεν είναι συνεχής, αλλά πραγματοποιείται μόνο κατά τη διάρκεια ενός ποσοστού του ολικού χρόνου και καλύπτει κάθε φορά τις ανάγκες ολόκληρου του χρονικού κύκλου.

Αυτό το σύστημα αποθεμάτων μπορεί να λειτουργήσει μόνο αν ισχύει η σχέση *R* > *k*. Από τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος προκύπτουν οι εξής αναλογίες:

$$\tau = \frac{Q}{R}$$

$$T = \frac{Q}{k}$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Ανάλυση Στοιχείων Κόστους

Κόστος προετοιμασίας: $C_{\pi\rho} = \frac{Z}{Q} * C_2$

Κόστος διατήρησης: $C_{\delta} = \frac{M}{2} * I * C_1 = \frac{Q}{2} * \left(1 - \frac{k}{R}\right) * I * C_1$

Άριστη ποσότητα παρτίδας παραγωγής: $Q_0 = \sqrt{\frac{2 * Z * C_2}{I * C_1 * \left(1 - \frac{k}{R}\right)}}$

Αν η αναπλήρωση του αποθέματος είναι στιγμιαία (οπότε ο ρυθμός παραγωγής $R \to \infty$), η σχέση αυτή ανάγεται στην εξίσωση υπολογισμού του Q_0 του συστήματος αποθεμάτων με ικανοποίηση της ζήτησης χωρίς καθυστέρηση. Επομένως το σύστημα εκείνο μπορεί να θεωρηθεί ως μερική περίπτωση αυτού του συστήματος, στο οποίο τα αποθέματα παράγονται από την ίδια την επιχείρηση.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Στάθμη παραγγελίας της παραγωγής: $A = k * t$

Μέγιστο απόθεμα: $M = Q_0 * \left(1 - \frac{k}{R}\right) = \sqrt{\frac{Z * C_2 * \left(1 - \frac{k}{R}\right)}{2 * I * C_1}}$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Αποθέματα Πολλών Υλικών με Περιορισμούς

Ό̈λα τα προηγούμενα συστήματα αποθεμάτων προϋπέθεταν την παρουσία ενός και μόνον υλικού. Η συντριπτική ωστόσο πλειοψηφία των οργανώσεων του πραγματικού κόσμου διαχειρίζεται και αποθηκεύει περισσότερα από ένα είδη.

Όταν δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση μεταξύ των υλικών, τότε το πρόβλημα της ταυτόχρονης διαχείρισής τους αντιμετωπίζεται εύκολα, εφαρμόζοντας για τον προγραμματισμό των αποθεμάτων κάθε υλικού τα γνωστά μαθηματικά μοντέλα.

Θεωρώντας ότι υπάρχει υποχρέωση άμεσης ικανοποίησης όλης της ζήτησης, η συνάρτηση του συνολικού κόστους διαχείρισης των αποθεμάτων είναι:

$$C_{\tau}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Z_i}{Q_i} * C_{2i} + \frac{Q_i}{2} * I_i * C_{1i}\right)$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Παραγωγίζοντας διαδοχικά τη συνάρτηση του συνολικού κόστους ως προς κάθε μία από τις n άγνωστες μεταβλητές Q_i, προσδιορίζονται οι άριστες ποσότητες παραγγελίας και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά μεγέθη όλων των υλικών.

Είναι πολύ πιθανή η ύπαρξη στην πράξη αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στα υλικά που διαχειρίζεται ένα σύστημα αποθεμάτων. Κύρια αιτία του φαινομένου αυτού είναι η ύπαρξη περιορισμών.

Πιθανοί περιορισμοί

Οι πιο συνηθισμένοι περιορισμοί των συστημάτων αποθεμάτων είναι:

- <u>Ανώτερο όριο στη διαθέσιμη χωρητικότητα της αποθήκης</u>
  (τα διάφορα υλικά συναγωνίζονται μεταξύ τους για την κατάληψη του εμβαδού ή του όγκου της αποθήκης)

- <u>Ανώτερο όριο στο μέγιστο κεφάλαιο που επενδύεται από την επιχείρηση για την προμήθεια των αποθεμάτων</u>
  (τα υλικά ανταγωνίζονται για τη διάθεση του απαραίτητου χρηματικού ποσού που καλύπτει τις άριστες ποσότητες παραγγελίας τους)

- <u>Ανώτερο όριο στο πλήθος των παραγγελιών που μπορούν να διεκπεραιωθούν από το σύστημα μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα</u>
  (τα υλικά ανταγωνίζονται για τη συχνότητα των παραγγελιών του καθενός)

Ανάλυση περιορισμού αποθηκευτικού χώρου

Έστω η περίπτωση, όπου η μέγιστη επιφάνεια του διαθέσιμου αποθηκευτικού χώρου ισούται με *F* μονάδες επιφάνειας. Στο χώρο αυτό αποθηκεύονται ταυτόχρονα *n* είδη, η δε μονάδα του είδους *i* καταλαμβάνει f_i μονάδες επιφάνειας. Για να μη παραβιάζεται ο περιορισμός του χώρου σε καμία χρονική στιγμή, πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i * Q_i = f_1 * Q_1 + f_2 * Q_2 + \ldots + f_n * Q_n \leq F$$

Προϋπόθεση για τη διαμόρφωση αυτής της σχέσης είναι η παραδοχή της ταυτόχρονης άφιξης όλων των παραγγελιών. Στην πράξη υπάρχει σχεδόν πάντα χρονική κλιμάκωση στις παραλαβές ανανέωσης των αποθεμάτων των διάφορων υλικών, οπότε δεν παρουσιάζεται ποτέ το μέγιστο απόθεμα. Για την αντιμετώπιση κάθε δυνατής περίπτωσης εισάγεται στον περιορισμό μία παραμετρική μεταβλητή που ονομάζεται ***συντελεστής κανονικότητας*** και συμβολίζεται με *g*.

Εισάγοντας το συντελεστή κανονικότητας *g* στον περιορισμό του διαθέσιμου χώρου αποθήκευσης, η αντίστοιχη σχέση γίνεται:

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

$$g * \sum_{i=1}^{n} f_1 * Q_1 \leq F$$

Αν ο περιορισμός του συστήματος είναι ενεργός, δημιουργείται η συνάρτηση:

$$L = C_\tau(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) + \lambda * (\sum_{i=1}^{n} f_i * Q_i - F)$$

όπου $C_\tau(Q_1,Q_2,...,Q_n)$: η συνάρτηση του συνολικού κόστους

$\Sigma f_i * Q_i$: η συνάρτηση του περιορισμού

λ: ο πολλαπλασιαστής Lagrange

F: το ανώτερο όριο του περιορισμού.

Στην παραπάνω συνάρτηση *L* υπάρχουν *n+1* άγνωστες μεταβλητές: οι ποσότητες παραγγελίας Q_i των *n* ειδών αντίστοιχα και ο πολλαπλασιαστής Lagrange *λ*.

Για τον προσδιορισμό των τιμών των άγνωστων μεταβλητών απαιτείται η παραγώγιση της συνάρτησης *L* ως προς καθεμιά από αυτές και η εξίσωση όλων των πρώτων παραγώγων με το μηδέν.

Οι άριστες ποσότητες Q_i υπολογίζονται με την επίλυση του ακόλουθου συστήματος *n+1* εξισώσεων με *n+1* αγνώστους:

$$\frac{\theta L}{\theta \lambda} = 0, \quad \frac{\theta L}{\theta Qi} = 0 \quad \text{(για i = 1, 2, ..., n)}$$

Η επίλυση του συστήματος αυτού δίνει τις μοναδικές άριστες λύσεις:

$$Q_i = \sqrt{\frac{2 * Z_i * C_{2i}}{I_i * C_{1i} + 2 * f_i * \lambda_0}} \quad \text{για (i = 1, 2, ..., n)}$$

όπου λ_o η μοναδική θετική τιμή του πολλαπλασιαστή *Lagrange* που προέκυψε από την επίλυση της εξίσωσης

$$\sum_{i=1}^{n} f_\iota * \sqrt{\frac{2 * Z_i * C_{2i}}{I_i * C_{i1} + 2 * f_i * \lambda_0}} = F$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Μεθοδολογία Επίλυσης Προβλήματος με Έναν Περιορισμό

1. Υπολογισμός των ποσοτήτων παραγγελίας Q_i, χωρίς να ληφθεί υπόψη ο περιορισμός.

2. Αν οι τιμές των Q_i ικανοποιούν τον περιορισμό, τότε το πρόβλημα έχει ήδη επιλυθεί (περιορισμός ανενεργός) $\Rightarrow$ Τέλος διαδικασίας.
   Αν δεν ικανοποιείται ο περιορισμός (περιορισμός ενεργός) $\Rightarrow$ Μεταφορά στο βήμα 3.

3. Σχηματισμός της συνάρτησης :

$$L = C_T(Q_1, Q_2, ..., Q_n) + \lambda * [\Phi(Q_1, Q_2, ..., Q_n) - D]$$

όπου
- D : το ανώτερο όριο του περιορισμού
- $C_T(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$: η συνάρτηση του συνολικού κόστους
- $\Phi(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$: η συνάρτηση του περιορισμού
- λ : ο πολλαπλασιαστής Lagrange

4. Υπολογισμός των άριστων ποσοτήτων παραγγελίας Q_i, λύνοντας το ακόλουθο σύστημα *n+1* εξισώσεων με *n+1* αγνώστους:

$$\frac{\theta L}{\theta Q1} = 0 \quad \text{(i = 1, 2,..., n)} \quad \text{και} \quad \frac{\theta L}{\theta \lambda} = 0$$

Μεθοδολογία Επίλυσης Προβλήματος με Δύο Περιορισμούς

1. Υπολογισμός των ποσοτήτων παραγγελίας Q_i, αγνοώντας όλους τους περιορισμούς, στους οποίους υπόκειται το σύστημα.

2. Αν οι τιμές των Q_i ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς, τότε το πρόβλημα έχει επιλυθεί (περιορισμοί ανενεργοί) $\Rightarrow$ Τέλος διαδικασίας.
   Αν δεν ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας ενεργός περιορισμός $\Rightarrow$ Μεταφορά στο βήμα 3.

3. Προσδιορισμός των τιμών Q_i, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τον πρώτο περιορισμό.
   Αν οι νέες τιμές των Q_i ικανοποιούν και το δεύτερο περιορισμό, τότε το πρόβλημα έχει επιλυθεί $\Rightarrow$ Τέλος διαδικασίας.
   Αν όχι $\Rightarrow$ Μεταφορά στο βήμα 4.

4. Νέος υπολογισμός των τιμών των Q_i, λαμβάνοντας υπόψη μόνο το δεύτερο περιορισμό.
   Αν οι νέες τιμές των Q_i ικανοποιούν και τον πρώτο περιορισμό, τότε το πρόβλημα έχει επιλυθεί $\Rightarrow$ Τέλος διαδικασίας.
   Αν όχι (περιορισμοί ενεργοί) $\Rightarrow$ Μεταφορά στο βήμα 5.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

5. Χρήση δύο πολλαπλασιαστών Lagrange για τη διαμόρφωση της συνάρτησης:

$$L = C_T(Q_1, Q_2, ..., Q_n) + \lambda_1 * [\Phi_1(Q_1, Q_2, ..., Q_n) - D_1)] + \lambda_2 * [\Phi_2(Q_1, Q_2, ..., Q_n) - D_2]$$

όπου

$C_T(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$	:	η συνάρτηση του συνολικού κόστους
$\Phi_1(Q_1, Q_2, .., Q_n)$	:	η συνάρτηση του πρώτου περιορισμού
$\Phi_2(Q_1, Q_2, .., Q_n)$	:	η συνάρτηση του δεύτερου περιορισμού
D_1, D_2	:	τα ανώτερα όρια των περιορισμών
λ_1, λ_2	:	οι δύο πολλαπλασιαστές Lagrange

6. Υπολογισμός των άριστων ποσοτήτων παραγγελίας Q_i, λύνοντας το ακόλουθο σύστημα *n+2* εξισώσεων με *n+2* αγνώστους:

$$\frac{\theta L}{\theta Q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n), \quad \frac{\theta L}{\theta \lambda_1} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\theta L}{\theta \lambda_2} = 0$$

Μεταβλητή Αξία της Μονάδας του Αποθέματος

Οι πολιτικές εκπτώσεων που υιοθετούν οι προμηθευτές εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες και παρουσιάζουν στην πράξη μεγάλη ποικιλία. Οι δύο μορφές έκπτωσης που χρησιμοποιούνται στην πλειοψηφία των περιπτώσεων είναι η ολική και η κλιμακωτή έκπτωση.

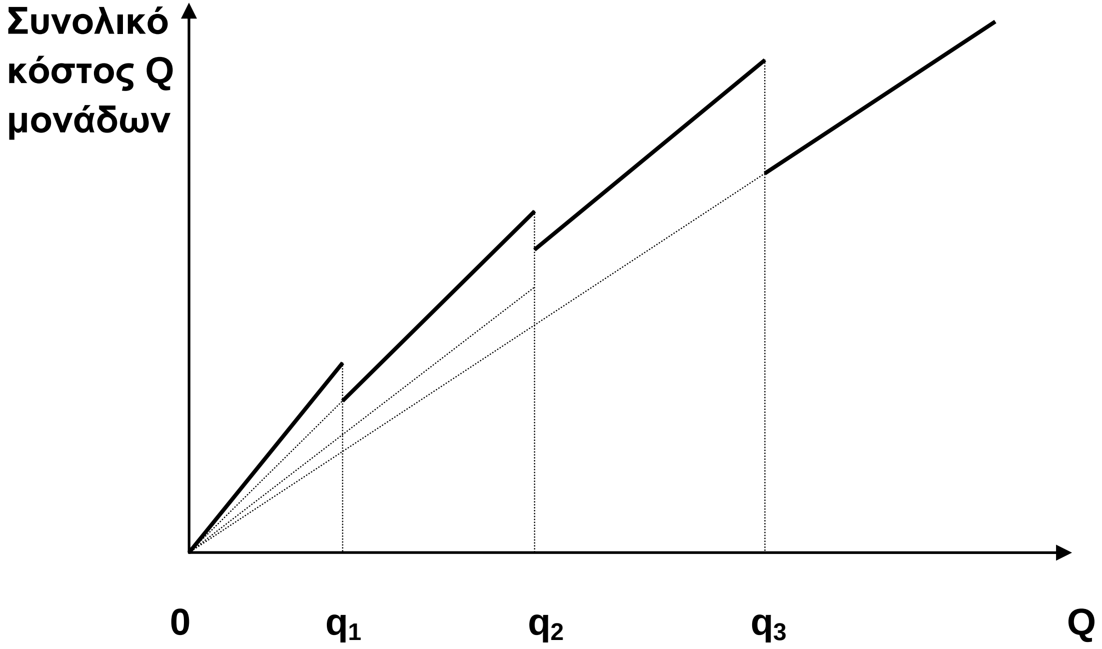
Ολική Έκπτωση

Οι εκπτώσεις παίρνουν τη μορφή διαδοχικών ορίων της τιμής της μονάδας ως εξής: Υπάρχουν δεδομένα όρια ποσοτήτων $q_o = 0, q_1, q_2,..., q_m$ όπου $q_j < q_j+1$, για $j = 1, 2, ..., m$ και $q_{m+1} = \infty$, τέτοια ώστε αν αγοράζεται ποσότητα Q όπου $q_j < Q < q_j+1$ τότε το κόστος της κάθε μονάδας ισούται με C_j.

Το κόστος αγοράς Q μονάδων ισούται με Q_*C_j και ισχύει πάντα η σχέση $C_j < C_{j+1}$.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Συνάρτηση Κόστους (Περίπτωση Ολικής ‘Έκπτωσης)



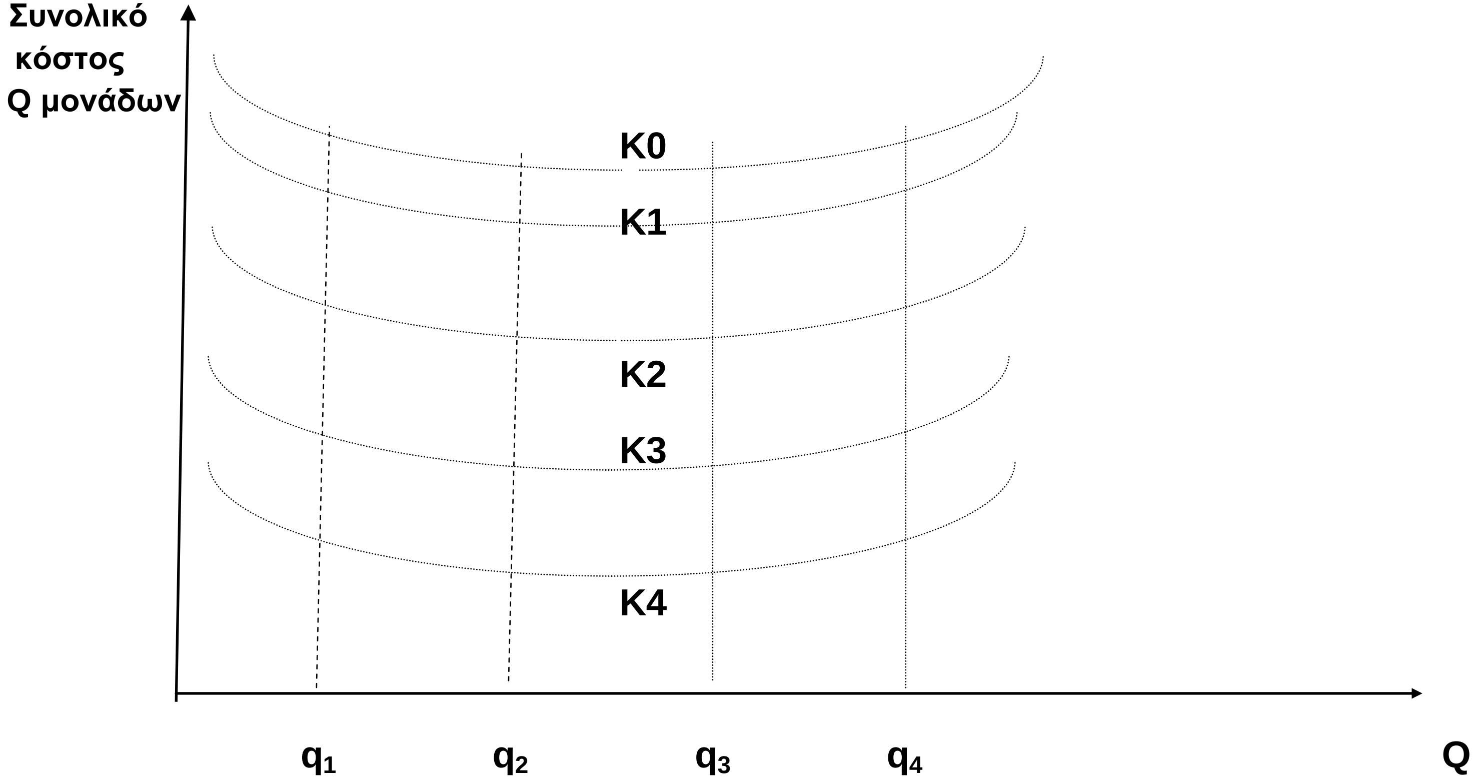
Για τον προσδιορισμό της άριστης πολιτικής πρέπει αρχικά να προσδιοριστεί μία καμπύλη κόστους για όλες τις δυνατές ποσότητες *Q* και όχι μόνο γι’ αυτή που βρίσκεται στο διάστημα $q_j < Q < q_{j+1}$. Δημιουργούνται *m+1* καμπύλες κόστους - μία για κάθε C_j –που δεν τέμνονται πουθενά μεταξύ τους, για όλες δε τις τιμές της ποσότητας *Q* ισχύει η σχέση $K_{j+1}(Q) < K_j(Q)$.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Η πραγματική καμπύλη του συνολικού ετήσιου κόστους για την αγορά και τη διαχείριση των αποθεμάτων απαρτίζεται από τα τμήματα των επιμέρους αντίστοιχων καμπύλων με συνεχόμενη γραμμή. Τα διακεκομμένα τμήματα των καμπύλων δεν έχουν φυσική υπόσταση και δεν είναι πραγματοποιήσιμα.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Καμπύλη Κόστους (Περίπτωση Ολικής Έκπτωσης)



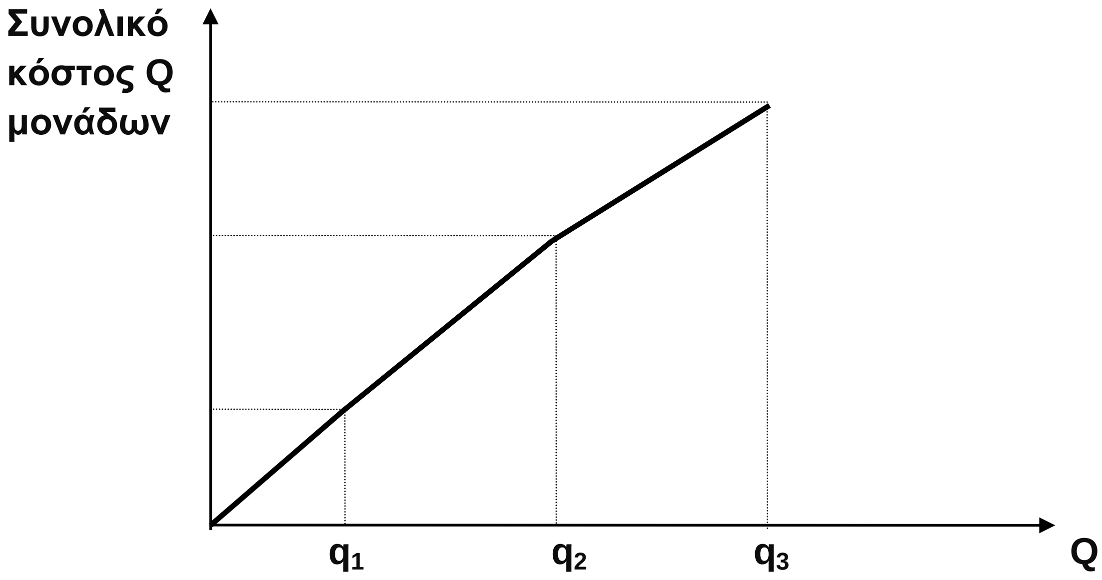
Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Κλιμακωτή Έκπτωση

Σε αυτή την περίπτωση έκπτωσης, ο προμηθευτής χρεώνει τιμή ίση με C_0 ανά μονάδα ενός είδους για τις μονάδες *1, 2,..., q_1*, τιμή C_1 ανά μονάδα για τις μονάδες q_1+1, q_1+2,..., q_2, τιμή C_2 ανά μονάδα για τις μονάδες q_2+1, q_2+2,..., q_3 κ.ο.κ.

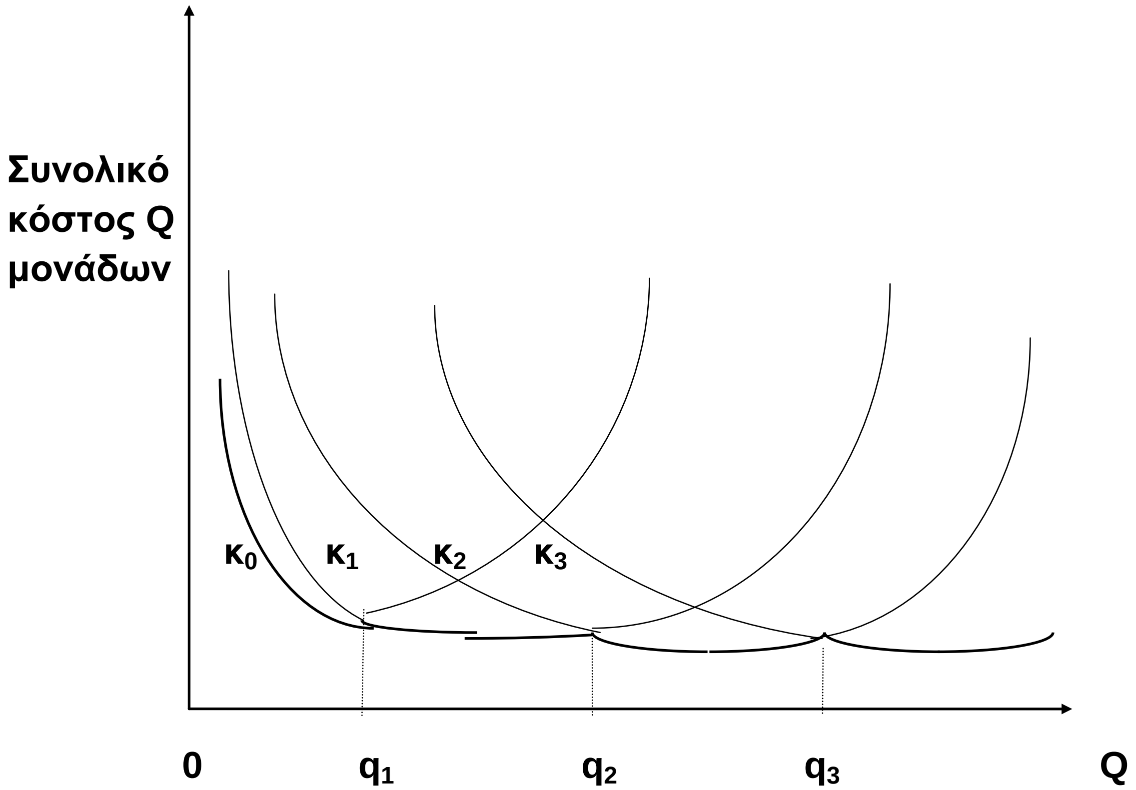
Συνεπώς, η τιμή αγοράς μιας ορισμένης μονάδας δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από τη θέση που κατέχει αυτή σε μία δεδομένη κλίμακα ποσοτήτων παραγγελίας. Η έκπτωση αυτή έχει νόημα μόνο όταν ισχύει η προφανής ανισότητα $C_0 < C_1 < \ldots < C_m$.

Συνάρτηση Κόστους (Περίπτωση Κλιμακωτής Έκπτωσης)



Έστω *Kj* το μέσο ετήσιο κόστος, όταν η ποσότητα παραγγελίας *Q* βρίσκεται ανάμεσα στα όρια τιμών q_j και q_j+1 ($q_j<Q<q_j+1$). Για τη δημιουργία της συνάρτησης του συνολικού κόστους μπορεί να υποτεθεί ότι το K_j ορίζεται για όλες τις θετικές τιμές της ποσότητας *Q,* έστω και αν το κόστος αυτό έχει φυσική υπόσταση μόνο όταν $q_j< Q<q_j+1$. Αν υπάρχουν *m* όρια τιμών τότε σχηματίζονται *m+1* ομοειδείς καμπύλες κόστους. Η πραγματική καμπύλη του ετήσιου συνολικού κόστους συνίσταται και εδώ από το σύνολο των συνεχών τμημάτων των επιμέρους καμπύλων κόστους.

Καμπύλες Κόστους (Περίπτωση Κλιμακωτής Έκπτωσης)



Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Το πρώτο βήμα της μεθοδολογίας προσδιορισμού της πλέον συμφέρουσας πολιτικής συνίσταται στην εξίσωση των δύο συναρτήσεων κόστους (επειδή αν ισχύει η σχέση $C_{\tau 0} = C_{\tau 1}$ δεν έχει καμία σημασία κατά πόσο παραγγέλλεται ποσότητα Q_0 ή Q_1).

$C_{\tau 0} = C_{\tau 1} \Rightarrow$

$$Z * C_0 + \frac{Z}{Q_0} * C_2 + \frac{Q_0}{2} * I * C_0 = Z * C_1 + \frac{Z}{Q_1} * C_2 + \frac{Q_1}{2} * I * C_1$$

Για να επιλυθεί αυτή η εξίσωση είναι απαραίτητη η ελάττωση των αγνώστων. Για το σκοπό αυτό εισάγονται οι σταθεροί συντελεστές p_1 και p_2 που εκφράζουν αντίστοιχα τα πηλίκα ποσοτήτων και τιμών:

$$p_1 = \frac{Q_1}{Q_0}$$

$$p_2 = \frac{C_1}{C_0}$$

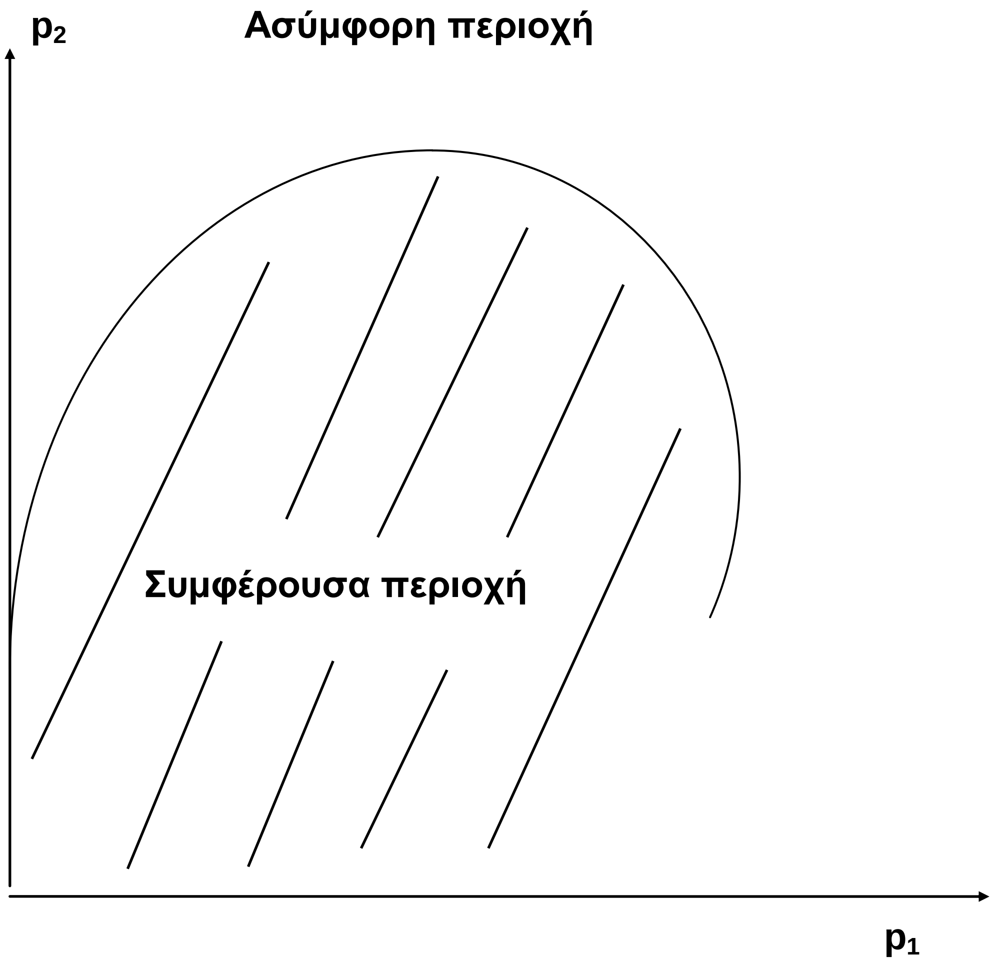
Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Εκφράζοντας όλους τους αγνώστους της παραπάνω εξίσωσης ως συναρτήσεις αυτών των συντελεστών καταλήγουμε στην ακόλουθη τελική εξίσωση που περιλαμβάνει δύο μόνον άγνωστες ποσότητες τις p_1 και p_2:

$$2 - \frac{1}{p_1} - p_1 * p_2 + \sqrt{\frac{2 * Z * C_0}{I * C_2}} * (1 - p_2) = 0$$

Η σχέση αυτή αποτελεί συνάρτηση δευτέρου βαθμού των συντελεστών p_1 και p_2. Για συγκεκριμένες τιμές των I, Z, C_0 και C_2, μπορεί να σχεδιαστεί η καμπύλη που συνδέει αυτούς τους συντελεστές p_1 και p_2.

Καμπύλη Συσχέτισης Συντελεστών p_1 και p_2



Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Το διάγραμμα της καμπύλης κόστους διακρίνεται σε τρεις περιοχές:

- Σημεία καμπύλης:

  Τα ζεύγη τιμών των p_1 και p_2 που αντιστοιχούν στα σημεία της καμπύλης δε δημιουργούν καμία διαφορά κόστους. Συνεπώς δεν υπάρχει καμία οικονομική διαφορά αν αγοράζεται ποσότητα Q_0 με τιμή μονάδας C_0 ή ποσότητα Q_1 με τιμή μονάδας C_1.

- Σημεία εσωτερικά της καμπύλης (συμφέρουσα περιοχή):

  Για όλα τα ζεύγη τιμών p_1 και p_2 που αντιστοιχούν σε σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης, η έκπτωση που παρέχεται είναι συμφέρουσα και πρέπει να γίνει αποδεκτή.

- Σημεία εξωτερικά της καμπύλης (ασύμφορη περιοχή):

  Για τα σημεία p_1 και p_2 που βρίσκονται έξω (πάνω) από την καμπύλη, η έκπτωση δεν είναι συμφέρουσα και πρέπει να απορριφθεί.

.

Μεθοδολογία Αποδοχής ή Απόρριψης Δεδομένης Έκπτωσης

1. Υπολογισμός της σταθερής ποσότητας $\sqrt{\frac{2 * Z * C_0}{I * C_2}}$
   (όπου C_0 η τιμή αγοράς της μονάδας χωρίς έκπτωση).

2. Εύρεση του σταθερού συντελεστή p_2 από τη σχέση $p_2 = C_1/C_0$.

3. Υπολογισμός των δύο τιμών (p_1΄ και p_1'') του συντελεστή p_1 από την εξίσωση:
$$2 - \frac{1}{p_1} - p_1 * p_2 + \sqrt{\frac{2 * Z * C_0}{I * C_2}} * (1 - p_2) = 0$$

4. Υπολογισμός της άριστης ποσότητας παραγγελίας από τη σχέση:
$$Q_0 = \sqrt{\frac{2 * Z * C_2}{I * C_0}}$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

5. Προσδιορισμός των ποσοτήτων $Q_1{'}$ και $Q_1{''}$ που δίνουν συνολικό κόστος ίδιο με αυτό της άριστης ποσότητας Q_0, από τις αναλογίες:

   $Q_1{'} = p_1{'} * Q_0$ και $Q_1{''} = p_1{''} * Q_0$.

6. Η προτεινόμενη έκπτωση p_2 συμφέρει μόνο όταν αγοράζονται ποσότητες που βρίσκονται στην περιοχή από $Q_1{'}$ έως $Q_1{''}$. Για ποσότητες αγοράς μικρότερες από $Q_1{'}$ ή μεγαλύτερες από $Q_1{''}$, η έκπτωση δε γίνεται αποδεκτή.